Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

Kompleksarvude liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja naturaalarvulise astendajaga astendamine on defineeritud nõnda, et jäävad kehtima tehete kõik senituntud omadused ja reeglid, välja arvatud imaginaarühiku astendamine. Seepärast vaatleme esmalt imaginaarühiku naturaalarvulise astendajaga astmeid:

Reaalarvu aste

$a^0 = 1,\ a \neq 0$

$a^1 = a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$

$i^0 = 1$ (nagu reaalarvude puhul);

$i^1 = i$ (nagu reaalarvude puhul);

$i^2 = -1$ (järeldub imaginaarühiku definitsioonist);

$i^3 = \underbrace{i^2}_{-1} \cdot i = -1 \cdot i = -i$;

$i^4 = \underbrace{i^3}_{-i} \cdot i = -i \cdot i = -\underbrace{i^2}_{-1} = -(-1) = 1$;

$i^5 = \underbrace{i^4}_{1} \cdot i = 1 \cdot i = i$;

$i^6 = \underbrace{i^5}_{i} \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$;

$i^7 = \underbrace{i^6}_{-1} \cdot i = -1 \cdot i = -i$;

$i^8 = \underbrace{i^7}_{-i} \cdot i = -i \cdot i = -\underbrace{i^2}_{-1} = -(-1) = 1$.

Näeme, et imaginaarühiku naturaalarvulise astendajaga astmete väärtustena korduvad perioodiliselt arvud 1, i, -1 ja $-i$. Seega

$i^{4k+n} = i^n$, kus $k \in \mathbb{Z}$, $n = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$

Näide

1) $i^{19} = i^{4\cdot4+3} = i^3 = -i$

2) $i^{21} = i^{4\cdot5+1} = i^1 = i$

3) $i^{40} = i^{4\cdot10+0} = i^0 = 1$

Tehteid kompleksarvudega algebralisel kujul sooritame nendesamade reeglite kohaselt, mille järgi sooritame tehteid algebraliste kaksliikmetega. Paneme tähele, et iga tehte korral saame tulemuseks jälle kompleksarvu.

Kompleksarvude hulk on kinnine kõigi tehete suhtes.

- Liitmine

Kahe kompleksarvu summa on kolmas kompleksarv

$$(a+bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Näide

1) $(2 + 5i) + (3 - 9i) = 2 + 5i + 3 - 9i = (2 + 3) + (5i - 9i) = 5 - 4i$

2) $(3 - 2i) + (3 + 2i) = 3 - 2i + 3 + 2i = (3 + 3) + (2i - 2i) = 6 + 0i = 6$

- Lahutamine

Kahe kompleksarvu vahe on kolmas kompleksarv.

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i.$$

Näide

1) $(1 + 3i) - (7 - 2i) = 1 + 3i - 7 + 2i = (1 - 7) + (3i + 2i) = -6 + 5i$

2) $5 - 3i - (1 + i) = 5 - 3i - 1 - i = (5 - 1) - (3i + i) = 4 - 4i$

- Korrutamine

Kahe kompleksarvu korrutis on kolmas kompleksarv.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd =$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Näide

1) $(1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i - 8\underbrace{i^2}_{-1} = 3 + 4i - 6i + 8 = 11 - 2i$

2) $(2 + i)(2 - i) = 4 - \underbrace{i^2}_{-1} = 4 + 1 = 5$

Viimase näite puhul kasutasime abivalemit $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ja saime kahe kaaskompleksarvu korrutiseks reaalarvu.

- Jagamine

Kahe kompleksarvu jagatis on kolmas kompleksarv.

Jagamistehte kirjutame murruna ning **murdu laiendame nimetaja kaaskompleksarvuga.** Nii vabaneme imaginaarsusest murru nimetajas.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \overset{\text{avame sulud}}{=}$$

$$\frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} \overset{\text{koondame reaal- ja imaginaarosa}}{=} \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \overset{\text{jagame reaal- ja imaginaarosa nimetajaga}}{=}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i,$$

kus $c^2 + d^2 \neq 0$. Nagu ratsionaal- ja reaalarvude puhul on kahe kompleksarvu jagatis määratud ainult siis, kui jagaja ei ole kompleksarv 0 $(0 + 0 \cdot i)$.

Näide

1) $\frac{2-5i}{3+i} = \frac{(2-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i-15i+5i^2}{9-i^2} = \frac{6-2i-15i-5}{9+1} = \frac{1-17i}{10} = 0{,}1 - 1{,}7i$

2) $\frac{1+4i}{5-2i}=\frac{(1+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{5+2i+20i+8i^2}{25-4i^2}=\frac{5+2i+20i-8}{25+4}=\frac{-3+22i}{29}=$

$=-\frac{3}{29}+\frac{22}{29}i$.

- Astendamine

Kompleksarvu aste on kompleksarv.

Kompleksarvu ruudu ja kuubi puhul kasutame abivalemeid, muud astmed leiame korrutamise teel.

$$\boxed{\begin{aligned}(a\pm b)^2&=a^2\pm 2ab+b^2\\(a\pm b)^3&=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\end{aligned}}$$

Näide

1) $(2-4i)^2=4-16i+16\underbrace{i^2}_{-1}=4-16i-16=-12-16i$

2) $(2+i)^3=8+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot\underbrace{i^2}_{-1}+\underbrace{i^3}_{-i}=8+12i-6-i=2+11i$

3) $(3-2i)^4=[(3-2i)^2]^2=(9-12i+4i^2)^2=$

$=(5-12i)^2=25-120i+144i^2=-119-120i$

4) $(1+i)^5=(1+i)^2\cdot(1+i)^3=$

$=(1+2i+i^2)\cdot\left(1+3i+\underbrace{3i^2}_{3\cdot(-1)}+\underbrace{i^3}_{-i}\right)=2i\cdot(-2+2i)=-4i-4$

- Juurimine

Kompleksarvu juurimine ning seega ka murrulise astendajaga astendamine ei toimu reaalarvude hulgas kehtivate eeskirjade kohaselt. Seda mitte arvestades võime saada väära tulemuse, nagu näiteks

$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)\cdot(-2)}=\sqrt{4}=2$,

kuna õige vastus on

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot i^2 = -2 .$$

Viga tekkis sellest, et me rakendasime reaalarvude hulgas kehtivat **juurte korrutamise eeskirja**, mis aga **kompleksarvude hulgas ei kehti**.