

Kompleksarvud

Miks on kompleksarvud vajalikud?

Eelnevalt laiendati arvu mõistet naturaalarvudest reaalarvudeni. Iga laiendamisega avardusid tehete sooritamise võimalused. Kuid ka reaalarvude hulgas on osa tehteid defineeritud teatud kitsendusega. Näiteks ei saa leida paarisarvulise juurijaga juurt negatiivsest arvust, $\sqrt{-9}$; $\sqrt[4]{-16}$ ei ole reaalarvulised väärtused.

Seetõttu jäävad reaalarvude hulgas lahendita paljud võrrandid.

Näiteks ruutvõrrandi $x^2 - 6x + 13 = 0$ lahendamisel saame:

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 13} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{-4}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{-4}$$

Taandatud ruutvõrrandi
 $x^2 + px + q = 0$
lahendivalem on

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Et ka niisugustel lahenditel oleks arvu tähendus, peame reaalarvude hulka laiendama uute arvudega.

Kompleksarvu mõiste

Vaatame uue arvuna võrrandi $x^2 + 1 = 0$ ehk $x^2 = -1$ lahendit, nimetame seda **imaginaarühikuks**¹ ja tähistame tähega i .

$$i^2 = -1$$

Vastavalt ruutjuure mõistele on siis

$$\sqrt{a} = b, \text{ kui } b^2 = a$$

$$\sqrt{-1} = i$$

Imaginaarühiku abil saab esitada ruutjuuri negatiivsetest arvudest, näiteks

¹ pr. k *imaginaire*- kujutletav. Nimetuse *imaginaire* võttis kasutusse prantsuse matemaatik Rene Descartes 1637.a.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

Ruutvõrrandi $x^2 - 6x + 13 = 0$ lahendeid

$$x_1 = 3 + \sqrt{-4}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{-4}$$

võib esitada kujul

$$x_1 = 3 + 2i$$

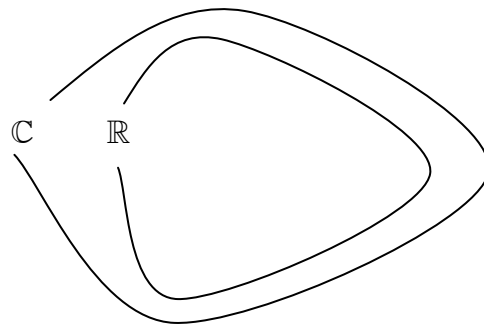
$$x_2 = 3 - 2i$$

Arve kujul $a + bi$, kus a ja b on mistahes reaalarvud ja i imaginaarühik, nimetatakse **kompleksarvudeks**².

Kompleksarv koosneb kahest komponendist. Komponenti a nimetatakse kompleksarvu **reaalosaks** ja komponenti bi **imaginaarosaks**. Arv b on imaginaarühiku kordaja.

Kompleksarvude hulka tähistatakse tähega \mathbb{C} .

Kui $b = 0$, siis $a + 0i = a \in \mathbb{R}$. Seega $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Kompleksarvude hulga moodustamiseks tuleb lisada reaalarvudele imaginaarühik, mis on defineeritud võrdusega $i^2 = -1$.

² Kompleksne (liitne), selle nimetuse andis arvudele $a + bi$ esmakordselt saksa matemaatik C.F.Gauss(1777-1855).

Kui $a = 0$, siis on tegemist puhtimaginaararvuga (bi). Kui $a = b = 0$, saame arvu 0 , mis kompleksarvu kujul on $0 + 0i$.

Arve $a + bi$ ja $-a - bi$ nimetatakse **vastandkompleksarvudeks** ning arve $a + bi$ ja $a - bi$ **kaaskompleksarvudeks**.

Kaks kompleksarvu on **võrdsed** siis ja ainult siis, kui nende reaalosad on omavahel võrdsed ja imaginaarosade kordajad on omavahel võrdsed, seega $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ ja $b = d$.

Kompleksarve **tähistatakse** tavaliselt tähestiku lõpupool paiknevate tähtedega **z, u, v, w** jne.

Avaldist $a + bi$ nimetatakse **kompleksarvu algebraliseks kujuks**.

Kompleksarvude hulk ei ole järjestatud, seega kompleksarve ei saa võrrelda suuruse järgi. Näiteks pole võimalik määrata kumb on suurem kas $2 + 3i$ või $3 + 2i$. Samuti ei lahendu kompleksarvude hulgas võrratused.

Kõik algebralised võrrandid on kompleksarvude hulgas lahenduvad ja igal võrrandil on nii palju lahendeid, kui suur on võrrandi aste.